В этом разделе демонстрируются дополнительные приемы решения задач электростатики.

**\*\*Задача.** Доказать:

где .

**Решение**.

Докажем первое соотношение.

Докажем второе соотношение.

По доказанному выше:

Вспомним, что

Тогда

На плоскости , в пространстве .

Так как

то запишем

В трехмерном пространстве:

На плоскости, в частности:

Что и требовалось доказать.

**\*\*Задача**. Показать, что частными решениями уравнения Лапласа являются

в двумерном случае:

в трехмерном случае:

где .

**Решение**.

Для решения задачи воспользуемся математическими соотношениями, выведенными ранее.

Для утверждение верно. Это очевидно. Докажем, что верно и второе утверждение.

Нам понадобятся следующие формулы:

В :

Поэтому

Теперь (учли, что на плоскости ):

Поэтому

В поступаем совершенно аналогично.

Поэтому

Теперь (учли, что в пространстве ):

Поэтому

**Задача**. Показать, что уравнение Лапласа не меняет своей формы в сферических координатах, если произвести замену вида:

где – потенциал .

Решение. Уравнение Лапласа в сферических координатах:

Угловую часть обозначим как и перепишем уравнение:

или

Одновременно произведем две замены:

Действительно, в этом случае мы получаем исследуемое преобразование:

Подстановка в исходное уравнение дает:

Заметим, что

тогда

Произведем очевидные сокращения.

Получили исходное уравнение, т.е.

Это свойство уравнения Лапласа лежит в основе так называемого метода инверсии.

**\*\*\*Задача**. Бесконечный цилиндр вносится в поперечное однородное электрическое поле . Считая, что цилиндр незаряженный идеальный проводник, найти изменение поля вокруг него.

**Решение**. Дадим более основательное решение задачи, опираясь на методы математической физики, а затем укажем, как можно упростить решение, если воспользоваться некоторыми интуитивными предположениями.

Пусть – однородное внешнее поле. В отсутствии цилиндра, потенциал поля всюду был бы равен

(предположили, что ). У цилиндра, внесенного во внешнее поле, появляются индукционные заряды, которые искажают внешнее поле. Предположим, – поле цилиндра, которое появилось после перераспределения зарядов, тогда полное поле найдётся суперпозицией:

Если - потенциал поля , то полный потенциал :

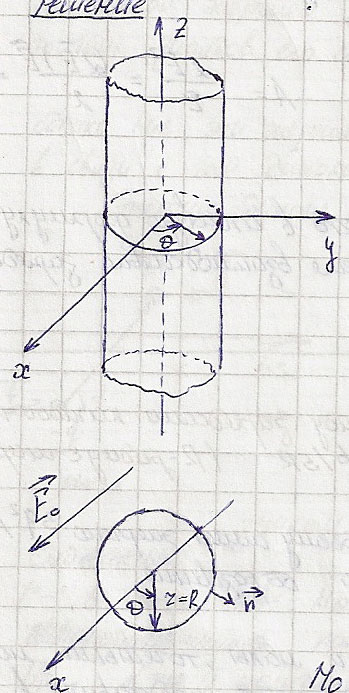
Ввиду осевой симметрии, переходим к цилиндрическим координатам и ограничиваемся плоскостью .

Вне цилиндра нет свободных зарядов, поэтому уравнение Лапласа в этой области

Т.е.

Так как то и

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:



Это уравнение решается методом Фурье, т.е. разделением переменных. Полагаем:

тогда уравнение приводится к виду

Правая и левая части равны друг другу лишь, если они равны константе. Предположим, это . Тогда

Аналогично для второго уравнения:

Уравнения решаются просто, но не следует забывать условия, которые обеспечивают единственность решения задачи и вообще отвечают требованиям в условии задачи. Решим уравнение (…2). Составим характеристическое уравнение

Решение записывается в виде

Нас интересует действительная часть:

Из смысла решения, очевидно, что

и для единственности должно соблюдаться требование

Решение будет периодическим, если только – целое число. Поэтому, для удобства, полагаем:

Пока на этом остановимся и найдем решение уравнения (…1). Это известное уравнение Эйлера и его частное решение следует искать в виде

Подстановка дает:

Найдены два частных решения

Общее решение находится как сумма

Таким образом, мы нашли целую серию частных решений уравнения Лапласа:

Поскольку уравнение Лапласа линейное, то и произвольная комбинация частных решений также будет удовлетворять уравнению Лапласа:

Теперь удовлетворим всем условиям задачи.

1. На бесконечности поле от цилиндра должно обращаться в нуль:

Следовательно, члены с множителем следует исключить.

2. Поле нормально к поверхности цилиндра, как у всякого идеального проводника. Но что это значит математически?

В цилиндрических координатах градиент:

Нормаль к поверхности это , поэтому прочие компоненты должны быть равны нулю. А именно

Безо всякого ущерба общности можно считать, что

Тогда

Если взглянуть на наше общее решение, то можно увидеть, что член, содержащий можно получить, только если . Так что

Ну и, поскольку

то

Как много рассуждений для того, чтобы получить такой простой по форме результат!

Полный потенциал

Поверхностная плотность заряда, в частности:

Замечание. В предыдущей задаче мы выяснили, что в двумерном случае частным решением уравнения Лапласа являются

Это сразу наталкивает на мысль, что решение уравнения следует искать в виде:

Константа легко находится из условия (см. выше):

Так мы сразу получаем решение задачи. Примеры подбора решений в различных случаях см. дальше в задачах.

**\*\*\*****Задача**. Найти искажение однородного электрического поля при внесении в него идеально проводящего незаряженного шара радиуса .

**Решение**. Как и в предыдущей задаче дадим самое полное решение задачи. Отметим сразу, что можно было бы вспомнить о частных решениях уравнения Лапласа в трехмерном случае:

тогда решение задачи логичным шагом было бы искать в виде:

с граничным условием

Итак, пусть – однородное внешнее поле. В отсутствии шара, потенциал поля всюду был бы равен

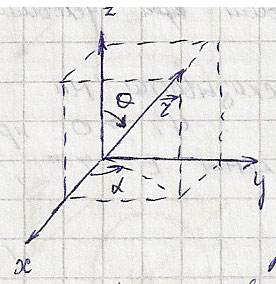
(предположили, что ). У шара, внесенного во внешнее поле, появляются индукционные заряды, которые искажают внешнее поле. Предположим, – поле шара, которое появилось после перераспределения зарядов, тогда полное поле найдётся суперпозицией:

Если - потенциал поля , то полный потенциал :

Вне шара нет свободных зарядов, поэтому уравнение Лапласа в этой области

Т.е.

Так как то и



Это уравнение и предстоит нам решать. Естественно перейти к сферическим координатам.

Систему координат развернем так, чтобы

В этом случае, ввиду осевой симметрии, потенциал не зависит от угла . Останется:

Методом Фурье ищем частное решение в виде:

Разделяя переменные и отмечая, что правая и левые части могут быть равны друг другу, если это константа, получаем

Первое уравнение:

Во втором целесообразно произвести замену , тогда

После несложных преобразований, уравнение принимает вид:

Это известное уравнение в теории специальных функций. Приведем краткую справку об уравнениях такого вида. Пусть

где – полином не выше 1-й степени, – полином не выше 2-й степени, – константа.

При и его решением будут полиномы Якоби

Для , т.е. это будут полиномы Лежандра

причем

Все эти сведения можно почерпнуть из замечательной книги: (Никифоров, Уваров «Специальные функции математической физики»).

Итак, решение второго уравнения нам известно. Тогда первое уравнение принимает вид:

Решение ищем в виде . Подстановка дает:

Комбинация двух частных решений

образует общее решение:

Частное решение уравнения Лапласа:

Полное решение будет линейной комбинацией частных:

1. На бесконечности поле от цилиндра должно обращаться в нуль:

Следовательно, члены с множителем следует исключить.

2. Поле нормально к поверхности шара, как у всякого идеального проводника. Но что это значит математически?

В сферических координатах градиент:

Нормаль к поверхности это , поэтому прочие компоненты должны быть равны нулю. А именно

Безо всякого ущерба общности можно считать, что

Тогда

Вернувшись к решению, видим, что можно получить лишь при

Тогда:

Ну и, поскольку

то

Полный потенциал

Поверхностная плотность заряда, в частности:

**Задача**. Найти дипольный момент следующих незаряженных проводников:

1. Шар в однородном поле

2. Цилиндр в поперечном однородном поле

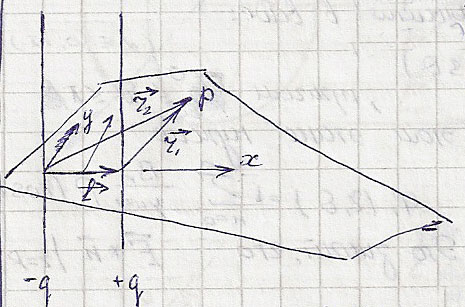
**Решение**.

1. Для решения этой задачи можно воспользоваться известным выражением для потенциала шара, внесенного в однородное электрическое поле (см. предыдущую задачу).

Рассматривая шар диполь на большом расстоянии, и сравнивая с потенциалом точечного диполя

можем написать для дипольного момента шара:

Можно эту же задачу решить [методом изображений](8_метод_электростатич_изобр.docx#Сфера_дип_момент).



2. Дипольный момент цилиндра из-за его протяженности следует рассматривать не как точечные заряды, смещенные друг относительно друга, а как тонкие бесконечные заряженные нити. Поэтому сначала найдем поле от таких нитей.

Поле и потенциал заряженной [нити](4_теор_Гаусса.docx#нить_поле_потенциал):

Рассмотрим в плоскости сечения точку . Потенциал в месте нахождения этой точки найдется суммой потенциалов от заряженных нитей:

Заметим, что математически

У нас , поэтому

Вид потенциалов совпадает с точность до знака (из-за заряда нитей), поэтому

Легко проверить непосредственным вычислением, что

поэтому (индекс у можно убрать – на больших расстояниях это не имеет значения)

Заметим, что заряд на 1ед. длины цилиндра . Тогда для единицы длины

Сравним с потенциалом цилиндра (см. выше):

Это означает, что дипольный момент цилиндра:

**\*\*\*Задача[12]**. Плоскость несет заряд с периодической поверхностной плотностью

Найти потенциал электрического поля в неограниченном пространстве.

**Решение**. Пространство заряженной плоскостью разделено на две части. В каждом полупространстве нет зарядов, поэтому для них верно уравнение Лапласа:

Добавим к уравнениям граничные условия. Если выделить достаточно малый элемент поверхности, чтобы плотность заряда на нем можно было считать постоянной величиной, то применительно к нему можно использовать теорему Гаусса.

Или

Добавим также равенство потенциалов на плоскости:

Заметим, что – периодическая функция и полный поверхностный заряд равен нулю. Поэтому потенциал на бесконечности стремится к нулю:

Периодичность подсказывает общий вид решения. Ищем потенциалы в виде:

Подстановка в уравнение (…1) приводит к уравнениям:

Решения находятся элементарно. Оставляем только те из них, которые удовлетворяют условию (…3).

Из условия (…3) находим, что

Условие (…2):

Окончательно

**\*\*\*Задача[6]**. Плоскость заряжена с плотностью, меняющейся по периодическому закону

где – постоянные. Найти потенциал системы зарядов.

**Решение**. Задача решается аналогично предыдущей задаче. Уравнения выглядят следующим образом

Граничные условия:

Кроме того, ввиду периодичности плотности заряда

Решение ищем в виде:

Подставив в уравнение Лапласа, получим:

Из решения отбрасываем те части, которые не обнуляются на бесконечности.

Граничные условия приводят к такой константе:

Окончательно:

**\*\*\*Задача**. Заряд распределен по поверхности сферы радиуса c поверхностной плотностью заряда

где – полярный угол сферической системы координат (конусы), начало которой совпадает с центром сферы. Найти напряженность и потенциал поля внутри и снаружи сферы.

**Решение**. В силу азимутальной симметрии, потенциал не зависит от второго угла в сферической системе координат. Кроме того, внутри и снаружи сферы нет зарядов, поэтому уравнения принимают вид:

Граничные условия:

Естественно перейти к сферическим:

и решение искать в виде:

Оно подбирается так, чтобы избавиться от угловой части. Подставив в уравнение, получим

Это уравнение решается путем поиска частных решений в виде . Подставив, мы получим квадратное уравнение с корнями . Это означает, что решение уравнения

Мы получили два таких решения для каждого из потенциалов. Иными словами

При потенциал должен быть ограниченным, а при потенциал , так что

Из равенства потенциалов найдем

Второе граничное условие приводит к равенству

Потенциалы, окончательно

Напряженность поля

Она же в сферических координатах:

Простое дифференцирование дает:

**\*\*\*Задача**. В сферических координатах объемная плотность внутри шара радиуса симметрична относительно оси и имеет вид

где – полярный угол сферической системы координат (конусы), начало которой совпадает с центром сферы. Найти напряженность и потенциал поля внутри и снаружи сферы.

**Решение**. Повторяем рассуждения предыдущей задачи.

В силу азимутальной симметрии, потенциал не зависит от второго угла в сферической системе координат. Кроме того, снаружи сферы нет зарядов, поэтому уравнения принимают вид:

Граничные условия:

Естественно перейти к сферическим:

и решение искать в виде:

Оно подбирается так, чтобы избавиться от угловой части. Подставив в уравнение, получим

Решение однородных частей (см. предыдущую задачу):

Подбором несложно найти частное решение первого уравнения. Его следует искать в виде . После подстановки, найдем, что частное решение это . Итак, решения уравнений принимают вид:

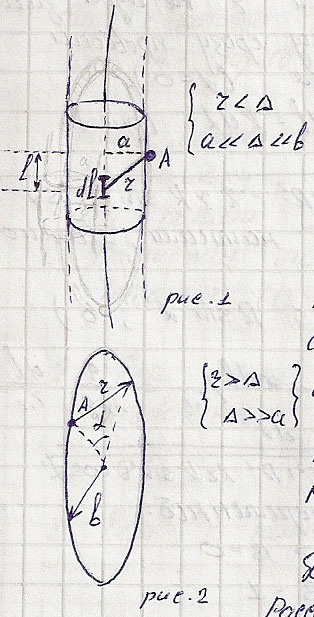
При потенциал должен быть ограниченным, а при потенциал , так что

Подстановка в граничные условия дает:

Напряженность поля . Она же в сферических координатах:

Простое дифференцирование дает:

**\*\*\*Задача[8]**. Определить емкость кольца из тонкого провода кругового сечения. Радиус кольца , радиус сечения , .



**Решение**. Если – потенциал на поверхности кольца, то емкость:

где – полный заряд кольца.

Кольцо тонкое имеет большой радиус, поэтому вблизи кольца, а именно на его поверхности, потенциал можно считать равным потенциалу тонкой прямолинейной нити, проходящей по оси. Сравни с [задачей](4_теор_Гаусса.docx#цилиндр_поверхность_поле_потенциал) про цилиндр, заряженный по поверхности. Выделим элемент нити . Его заряд:

Потенциал, создаваемый этим элементом:

Полный потенциал:

При вычислении интеграла прибегают к следующему искусственному приему (Ландау, Лифшиц, т.8). Пусть . Выделяем две области интегрирования, и . Интеграл вычисляем для каждой из областей.

При участок кольца считаем прямым.

При можно пренебречь толщиной кольца. Тогда можно считать расстоянием между двумя точками кольца (рис). Очевидно, и

Верхний предел интегрирования ясен, а вот нижний нужно определить из условия . Пусть

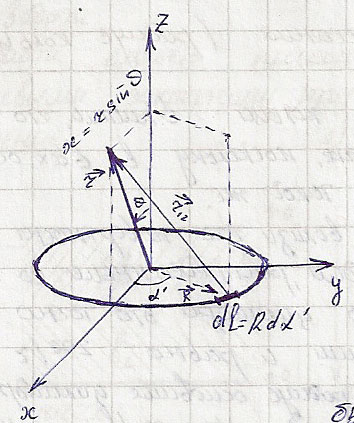
Тогда

Складываем решения:

**\*\*\*Задача[6№89]**. Выразить потенциал равномерно заряженного круглого тонкого кольца с зарядом и радиусом через полный эллиптический интеграл 1-го рода

Указание: при выполнении интегрирования по азимуту сделать замену .

**Решение**. Ввиду симметрии задачи, оси располагаем как на рисунке. Ось проводим через точку наблюдения. В этом случае не зависит от азимутального угла и найденное значение потенциала будет верно для любого значения . Этот прием не влияет на общность решения задачи.



Выделим элемент кольца:

Согласно рисунку

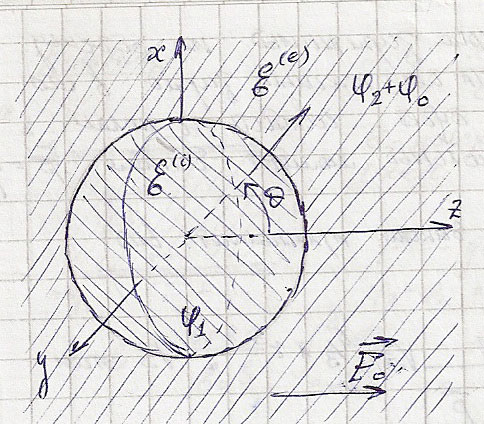
Поэтому потенциал элемента кольца:

Замена :

Вводим обозначение

Окончательно

**Задача**. Диэлектрический шар с проницаемостью помещен в диэлектрическую среду с проницаемостью . Под действием внешнего поля шар поляризуется. Найти результирующее поле вне и внутри шара.



**Решение**. [Ранее](5_диэлектрики.docx#диэл_шар_в_поле) мы рассматривали диэлектрический шар во внешнем поле. Теперь у нас еще более общий случай.

Пусть – потенциал внешнего однородного поля. Тогда, согласно введенной системе координат

Ввиду симметрии задачи потенциал зависит только от угла и .

Предположим, – потенциал внутри шара, а вне шара представим потенциал в виде , где имеет смысл искажения потенциала однородного поля при внесении в него шара. Очевидно, внутри и вне шара верно уравнение Лапласа.

Граничные условия:

Кроме того

Мы уже [решали](6_уравнения_электростатики_1.docx#поле_шара_в_однор_поле) уравнение Лапласа для задачи со сферической симметрией. Его решение имеет вид:

Отсюда легко понять, что потенциалы следует искать в виде

Подставим эти решения в граничные условия

Приравниваем коэффициенты при равных степенях полинома.

Отсюда находим, что

Следовательно

Теперь уже легко найти напряженность поля.

градиент в сферических координатах:

Внутри шара

Вне шара